中 国 科 学 技 术 大 学 数 学 科 学 学 院
2019夏令营试题–高阶课程

实变函数

1. 设f_n是$[0,1]$上的可测函数列，几乎处处收敛于f。若$1 \le q < p < \infty$，并且$\|f_n\|_{L^p}$是有界的。证明：

$$f_n \to f \quad \text{in} \quad L^q.$$

2. 设E是$\mathbb{R}$中的一个子集，满足$m_*(E) > 0$，其中m_*表示外测度。证明：对于任何$\alpha \in (0,1)$，存在一个开区间I，使得

$$m_*(I \cap E) \ge \alpha m_*(I).$$

复变函数

1. 方程$z^4 - 8z - 10 = 0$在圆环$1 < |z| < 3$上有几个根？为什么？

2. 设$f(z)$在$\{|z| < 1\}$内解析，在$\{|z| \le 1\}$ 上连续，并且，当$|z| = 1$时，有$|f(z)| = 1$。试证明：$f(z)$（可以解析延拓成为）是有理函数。

微分几何

1. 设 $f(x^1, x^2)$ 是某个平面区域 D 上的光滑函数。考虑三维欧氏空间 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面 S:

$$(x^1, x^2, f(x^1, x^2)), \quad (x^1, x^2) \in D.$$

记$f_i := \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, 2$, $|\nabla f|^2 := \sum_{i=1}^2 f_i^2$.

(1) 求曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式。

(2) 称平均曲率为零的曲面为极小曲面。证明：若 f 满足方程

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f_i}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0,$$

则曲面 S 为极小曲面。

2. 完成以下：

(1) 试判断 $\mathbf{E}^3$ 中的单位(标准)球面在去掉南极、北极两点后，能否与一个平面区域建立起等距变换并说明理由。

(2) (光滑)曲面上任意给定两点，在连结这两点的所有(光滑)曲线中，测地线的长度是否一定最短并说明理由。

近世代数

1. 考虑对称群S_4，以及元素(12)(34)所在的共轭类C。回顾S_4共轭作用在C上：$g.x = gxg^{-1}$。回顾任给元素$x \in C$ 的稳定化子为$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in S_4 \mid g.x = x\}$，其为子群。试具体计算$C$中所有元素的稳定化子。

2. 考虑二元域$\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$，以及其上的一元多项式环$\mathbb{F}_2[t]$，其中$t$为变元。考虑以下三个商环$\mathbb{F}_2[t]/(t^2)$, $\mathbb{F}_2[t]/(t^2+t+\bar{1})$和$\mathbb{F}_2[t]/(t^2+\bar{1})$。试判断并讨论它们之间是否存在环同构？