博士资格考试代数考题

二零零八年秋

注意: 在**不引起所问问题平凡化**的情况下, 可以使用任何你认为合适的结果.

1. 记$\mathbb{F}_q$为$q=p^f$元有限域. 其唯一n次扩张记为$\mathbb{F}_{q^n}$. $\mathbb{F}_q$上n阶可逆方阵构成的群记为$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, 其中迹为1的方阵构成的子群记为$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

(1) 设$\mathbb{F}_{q^n}$中非零元α在$\mathbb{F}_q$上的首一不可约多项式为d次多项式$f(x)=x^d+a_{d-1}x^{d-1}+\cdots+a_0$. 证明$d\mid n$.

(2) 设α如(1). 令T_α为$\mathbb{F}_{q^n}$上的线性变换$x\mapsto \alpha x$. 试求T_α的行列式值$\det T_\alpha$.

(3) 证明$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$中存在$q^n-1$阶循环子群.

(4) 试计算$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$和$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$的元素个数.

(5) 证明$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$的Sylow p-子群同构于$\mathbb{F}_q$.

(6) 证明$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)/\{\pm I\}$同构于$A_4$.

2. 设R为整环, K为其商域.

(1) 证明$K[x]$是PID (主理想整环).

(2) 设$K[x]$中的非零理想$I=(f(x))$. 证明下列条件等价: (a) I是极大理想; (b) I是素理想; (c) f不可约.

(3) 设R为局部环, 证明$R[x]$不是PID.

3. 记$K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

(1) 试求伽罗瓦群$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(2) 求$\sqrt{2}+\sqrt{6}$在$\mathbb{Q}[x]$上的极小多项式.

(3) 求出$K/\mathbb{Q}$的所有中间域.

4. 设R为交换环. 考虑如下行正合的R-模交换图表

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & & \end{array}$$

证明:

(1) 如果f,h为单射, 则g为单射.

(2) 如果f,h为满射, 则g为满射.

(3) 如进一步假设$0\to M'\to M$ 和$N\to N''\to 0$ 正合. 证明如f,g,h中任何两个同构, 则第三个也为同构.