博士资格考试：应用数学综合

样题

2012 年 11 月 30 日

§1 数学基础

本部分试题由偏微分方程 (30 分)，泛函分析 (40 分) 组成。应试者需要解答所有问题。

§1.1 偏微分方程

作为样题，这里列出了五题。实际考试时只会出现两到三题。

1. 确定如下方程的类型
$$u_{xx} - 2\alpha u_{xy} - 3\alpha^2 u_{yy} + u_x = 0,$$
并将其化为标准形式，然后求出其通解。

2. 求解初值问题：
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_3 u, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u_t\big|_{t=0} = |x|^7. \end{cases}$$

3. 求解定解问题：
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,\ 1),\ t > 0, \\ u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=1} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$
其中 $\varphi(x) \in C_0^\infty((0,\ 1))$. 并讨论上述定解问题的解 $u(x,t)$ 何时满足
$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0,\ \forall\ x \in (0,\ 1).$$

4. 给定平面上的水平带状区域 $D = \{(x,y) \mid -1 < y < 1\}$, 二元函数 $u(x,y)$ 在区域 D 的闭包上连续，在区域 D 内调和，且
$$u\big|_{y=\pm1} = 0,\quad |u(x,y)| \leqslant \frac{1}{1+x^2},\ (x,y) \in D.$$
证明：u 在整个水平带状区域 D 上为零。

5. 试求初值问题

$$\begin{cases} u_t = \Delta_3 u + f(t, M), \quad M \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(M), \end{cases}$$

的基本解 $U(t, M)$, 并推导上述初值问题解的积分表达式

$$u(t, M) = U(t, M) * \varphi(M) + \int_0^t = U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\ \mathrm{d}\tau,$$

其中 $f * g$ 是 f 和 g 的卷积。

§1.2　泛函分析

1. 下面的说法是否正确？如果错误，请说明理由或举出相应的反例；如果正确，请给出证明。

   (a) Hilbert 空间一定是自反的；

   (b) 设 X 是 Hilbert 空间，Y 是 X 的子空间，则 $\forall f \in Y^*$ 均可唯一地保范延拓为 X 上连续线性泛函。

2. 设 X 是实赋范线性空间。给定 X 中 n 个线性无关向量 $x_1, \ldots, x_n$ 和 n 个实数 $c_1, \ldots, c_n$, 证明：当且仅当对任意的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 满足

$$|\lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n| \leq \|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\|$$

   时，存在 $f \in X^*$ 满足 $\|f\| \leq 1$ 且 $f(x_i) = c_i$, $i = 1, \ldots, n$.

§2　专业基础

应试者请根据将来的研究方向和导师的意见，仅选择各模块之一进行解答，并且在此用 $\surd$ 标记出您所选择的模块：

(　)1. 最优化理论与算法；(　)2. 计算机图形学；(　)3. 计算机辅助几何设计；(　)4. 生物数学。

§2.1　最优化理论与算法

1. 写出如下问题的对偶模型，并求解原问题和对偶问题。

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant 3, \\ & x_1 - 2x_3 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

2. 请证明如下模型为凸优化问题，并给出一种求解算法及其步骤。

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \|Lx\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax - b\|_2 \leqslant \epsilon, \end{aligned}$$

   其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, 且 $m < n$.

3. 设 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是非线性函数（映射），令 $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|F(\mathbf{x})\|^2$, 并记 $J_F(\mathbf{x})$ 为 F 的 Jacobi 阵.

   (a) 请写出 $\nabla f =?$

   (b) 请问非线性方程组 $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的牛顿迭代步 $\mathbf{d} = -[J_F(\mathbf{x})]^{-1}F(\mathbf{x})$, 何时是函数 f 在 $\mathbf{x}$ 处的下降方向？

   (c) 证明针对 $\min f(\mathbf{x})$ 的牛顿迭代的局部二阶收敛性.

§2.2 计算机图形学

1. 分别写出三维空间中绕 x 轴旋转 α 角度、绕 y 轴旋转 β 角度、绕 z 轴旋转 γ 角度的旋转矩阵 $R_x(\alpha)$, $R_y(\beta)$, $R_z(\gamma)$. 推导出空间中绕从原点到点 (l_x, l_y, l_z) 的直线 L 旋转 θ 角度的旋转矩阵 $R_L(\theta)$。试问：$R_L(\theta)$ 是否可由一系列的绕坐标轴的旋转得到？如何得到？说明理由。

2. 叙述 Phong 光照模型的计算方法及公式。若要分别模拟金属材质和塑料材质，需要如何设置 Phong 光照模型中的参数？

3. 叙述一下场景渲染的光线跟踪算法和辐射度算法，分析这两个渲染算法的优劣与区别，并谈谈你对渲染算法的未来发展的看法。

§2.3 计算机辅助几何设计

1. Timmer 曲线的定义为

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}_i f_i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

   其中

$$f_0(t) = (1-2t)(1-t)^2,\ f_1(t) = 4t(1-t)^2,\ f_2(t) = 4t^2(1-t),\ f_3(t) = (2t-1)t^2.$$

   回答下列问题，并给出理由：

   (a) Timmer 曲线是否插值控制多边形的两端点？

   (b) Timmer 曲线是否插值 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ 的中点？

   (c) Timmer 曲线是否在两端点与控制多边形相切？

   (d) Timmer 曲线是否对称？

   (e) Timmer 曲线是否具有凸包性？

   (f) Timmer 曲线是否具有仿射不变性？

2. 给定一条四次曲线 $\mathbf{P}(t)$，它在 $[0,1]$ 区间上曲线段的 Bézier 控制顶点为 $\mathbf{P}_0 = (0,0)$, $\mathbf{P}_1 = (0,0)$, $\mathbf{P}_2 = (0,1)$, $\mathbf{P}_3 = (0,4)$, $\mathbf{P}_4 = (3,4)$. 那么 $\mathbf{P}(t)$ 在区间 $[-1,1]$ 上对应曲线段的 Bézier 控制顶点是什么？画出此条曲线段的示意图。

§2.4 生物数学

1. (a) 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界连通开集，且边界光滑。设存在 $T>0$, $u_i \in C_1^2(U_T)C(\bar{U}_T)$, $i=1,2$, 为

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + cu + f(x,t), & \text{in } U_T, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial U, 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = g_i(x), & x \in U \end{cases}$$

的解，且 $f \in C_1^2(U_T)C(\bar{U}_T)$, $g_i \in C(\bar{U})$, $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, $\forall x \in \bar{U}$. 证明：$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t)$, $\forall x \in \bar{U}$, $0 < t < T$.

(b) 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界连通开集，且边界光滑。设存在 $T>0$, $u_i \in C_1^2(U_T)C(\bar{U}_T)$, $i=1,2$, 为

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + cu + u(1-u), & \text{in } U_T, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial U, 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = g_i(x), & x \in U \end{cases}$$

的解, $g_i \in C(\bar{U})$, $g_1(x) \leqslant g_2(x)$, $\forall x \in \bar{U}$. 证明：$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t)$, $\forall x \in \bar{U}$, $0 < t < T$.

2. 证明常微分方程 $y' = f(y)$ 没有周期解, 这里 f 李普希斯连续。

3. 分析常微分方程 $dx/dt = x(sa(t) - x)$ 的全局动力学，这里 $a(t)$ 为正周期函数，s 为参数。

4. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中常微分方程组 $dx/dt = Ax$, x 为 $\mathbb{R}^n$ 中向量，A 为 n 维方阵且非对角线元素都大于 0. 求证如果初值向量在第一象限，则对 $t>0$, 解也位于第一象限。