微分流形与代数拓扑

科大数学系博士资格考试题

2009.9.26—27

微分流形部分：5 题选做 4 题，共 60 分（每题 15 分）

1. 设 M 为 n 维 $C^k(k \geq 2)$ 微分流形，对 $x \in M$, 记 T_xM 为 M 在 x 点处的切空间. 令 $TM = \{(x, \nu) : x \in M, v \in T_xM\}$ 为 M 的切丛：请证明 M 的微分结构自然诱导出 TM 的 C^{k-1} 微分结构.

2. 设 M 为光滑流形，$X \in X(M)$, 为光滑切向量场. 定义内乘 $i_X : A^r(M) \to A^{r-1}(M)$, 即对 $\forall \omega \in A^r(M)$, $v_1, \cdots, v_{r-1} \in X(M)$, 有 $(i_X\omega)(v_1, \cdots, v_{r-1}) := \omega(X, v_1, \cdots, v_{r-1})$. 证明：

(1) 对 $\forall \omega \in A'(M)$, $X, V \in X(M)$ 有

$$[(i_X \circ d + d \circ i_X)\omega](V) = X(\omega(V)) - \omega([X, V]).$$

(2) 设 (U, x^i) 为 M 的坐标卡，$\omega \in A^2(M)$ 在 (U, x^i) 表示为

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2} \omega_{i_1, i_2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}, \quad X \in X(M) \text{ 表示为：} X|_U = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

请计算：$i_X\omega$ 的局部表达式。

3. 设 $f : D \to R^3$ 定义为：$f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 + 1)$, 其中 $D = [0, 1] \times [0, 1]$. 设 $\omega = ydy \wedge dz + xzdx \wedge dz$. 求：$\int_D f^*\omega$.

4. 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中引进坐标 $p_1, \cdots, p_n$; $q_1, \cdots, q_n$, 考虑形式

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dp_i \wedge dq_i,$$

对 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的任意 C^∞ 函数 H, 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上定义向量场 X_H 如下

$$\omega(X_H, \nu) = dH(\nu), \quad \text{对 } \forall \nu \text{ 为 } R^{2n} \text{ 上一 } C^\infty \text{ 切向量场.}$$

(a) 试证：在 X_H 的每条积分曲线上，H 为常数.

(b) 用 H 和它的偏导数表出 X_H 的确切表达式。

5. 设 M 为 n 维 C^∞ 微分流形，$f \in C^\infty(M)$, $p \in M$, 又 $X_1, ..., X_n$ 为 M 上光滑向量场使得 $\{X_1(p), \cdots, X_n(p)\}$ 线性无关. 设 $\mathrm{Hess} f(\rho)$ 为 $n \times n$ 矩阵, 它的第 i 行和第 j 列元素为 $X_i(X_j f)(p)$. 设 $df(p) = 0$. 试证

(a) $\mathrm{Hess} f(\rho)$ 为对称方程.

(b) 记 $\mathrm{Ind}(f(p))$ 为 $\mathrm{Hess} f(\rho)$ 的负特征值的个数. 则 $\mathrm{Ind} f(p)$ 与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的选取无关.

(c) 设 $M: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f: M \to R$ 由 $f(x,y,z) = xy + z$ 定义，设 $p = (0,0,1) \in M$. 试证：$df(p) = 0$, 并求出 $\mathrm{Ind} f(p)$.

微分流形部分：以下四题中任选三题，每题 13 分.

1. 记二维圆盘 D^2 的边界为 S^1. 证明若 $f, g:\ S^1 \to X$ 是同伦等价的连续映射，则用 f 与用 g 将圆盘 D^2 贴附到 X 上所得的空间是同伦等价的；也即 $X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2$.

2. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中 m 条不同的过原点直线之并，求 X 的基本群以及各阶同调群.

3. 证明若 X 是一个道路连通，局部道路连通的空间，且 $\pi_1(X)$ 为有限群，那么每个从 X 到 S^1 的连续映射都为零伦，也即同伦等价于一个到单点的映射.（可利用复迭空间 $\mathbb{R} \to S^1$.）

4. 证明每个不可定向曲面有一个可定向的二重复迭空间.