

中国科学技术大学
2016年研究生复试试题

1. (25分) 设函数 f 在域 D 内解析, 且 $f(z) \neq 0$, 求 $\Delta|f(z)|^p$, 其中 $p > 1$.
2. (25分) 证明或否定: 存在常数 $M > 0$, 使得对所有的全纯多项式 $P(z)$ 都成立

$$\max_{z \in \mathbb{T}} |z^{-1} - P(z)| \geq M,$$

其中 \mathbb{T} 是单位圆周.

3. (25分) 求极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} t^{-\frac{1}{n}} dt.$$

需写明可在积分号下取极限的理由.

4. (25分) 证明: f 是 $[0, 1]$ 上的绝对连续函数当且仅当 $x \mapsto \int_0^x f$ 是绝对连续函数, 其中 $\int_0^x f$ 是 f 在 $[0, x]$ 上的全变差.

5. (30分) S_4 为对称群, $GL(2, \mathbb{C})$ 为由全体2阶可逆复方阵组成的群。

- (1) 列出 S_4 的所有正规子群; 给出相关论证。
- (2) 给出 S_4 的所有2-Sylow子群; 给出相关论证。
- (3) 是否存在非平凡的群同态 $S_4 \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$? 单同态呢?

6. (20分) 试完成如下题目:

- (1) 给出8元域 \mathbb{F}_8 的具体构造。
- (2) 将 \mathbb{F}_8 上的多项式 $x^3 + x + \bar{1}$ 分解成不可约多项式的乘积。

7. (25分) 设旋转曲面方程为 $\vec{r}(u_1, u_2) = (f(u_2) \cos u_1, f(u_2) \sin u_1, u_2)$, 其中 $f > 0$ 。

- (1) 计算其第一和第二基本形式;
- (2) 计算其上的平均曲率;
- (3) 当Gauss曲率恒为零时, 上述旋转曲面为何种曲面;
- (4) 非脐点情形, 求其上的曲率线。

8. (10分) 已知曲面的第一基本形式为 $(du)^2 + (2 + \cos u)^2 (dv)^2$, 利用么正活动标架计算其Gauss曲率 (写出过程)。

9. (15分)

- (1) (9分) 设 Σ 是三维欧氏空间中的光滑紧致曲面, 并且同胚于环面. 证明: 其上必分别存在点使其Gauss曲率为正, 负和零;
- (2) (6分) 判断三维欧氏空间中是否存在紧致的极小曲面, 并说明理由。